Методическая разработка темы:

**«Метод рационализации при решении неравенств»**

Методическая разработка посвящена построению цикла занятий интенсивной подготовке к 15 заданию ЕГЭ профильного уровня.

Цели:

* Обеспечить закрепление алгоритма обобщенного метода интервалов;
* Научить применять метод рационализации к решению показательных и логарифмических неравенств с переменной в основании.
* Показать насколько проще решать неравенства именно этим методом.

Задачи:

Формирование устойчивых навыков решения неравенств

Воспитание настойчивости и терпения

Развитие критического мышления, навыков групповой самоорганизации, развитие логического мышления, способности чётко формулировать свои мысли.

Формы работы:

* использование опорных конспектов
* мозговой штурм;
* лови звезду;
* лови ошибку;
* работа в группах, парах;
* работа с тренажерами (двухсторонние карточки, на одной стороне которых напечатано задание, а на другой - ответы);
* разноуровневые зачетные работы:
* - друг другу
* - консультанту
* - учителю.

По сравнению с другими учебными предметами математика, несомненно, выделяется своей трудоемкостью, необходимостью большой самостоятельной, повседневной работы.

Надо вдумчиво, ежедневно, серьезно работать, чтобы овладеть математикой даже в минимальных размерах, не говоря, уже о более значительных успехах. Поэтому усилия учителя должны быть направлены на формирование у школьников потребности в учебной деятельности, неуемного желания учиться.

Необходимо выработать положительное отношение учеников к математике, создавать

ситуации успеха, ликвидировать боязнь решения математических задач, формировать

уверенность в своих способностях.

Объяснять необходимо понятно, лаконично, сопровождая объяснение краткими , красочными записями.

Тренинги составлять от простого к сложному.

Привлекать к использованию сайтов , где сложные задания разбираются.Например «Решу ЕГЭ»

Перед решением показательных и логарифмических неравенств необходимо отработать применение метода интервалов.

Схема решения выглядит следующим образом:

1. Привести неравенство к такому виду, где в левой части находится функция , а в правой 0.
2. Найти область определения функции 
3. Найти нули функции , то есть – решить уравнение  (а решать уравнение обычно проще, чем решать неравенство)
4. Изобразить на числовой прямой область определения и нули функции.
5. Определить знаки функции  на полученных интервалах.
6. Выбрать интервалы, где функция принимает необходимые значения, и записать ответ.

Решим неравенство:



Рассмотрим функцию: 

Нули функции: .

Точка разрыва функции: .

Эти четыре точки разбивают числовую прямую на пять промежутков:



Ответ можно записать двумя способами:

1) ;

2) .

**Пример 1**: Решить неравенство:



Рассмотрим функцию 

Отметим на координатной прямой закрашенными точками нули функции, т.е. точки -6; -2; 1; 3 и незакрашенными кружочками точки разрыва этой функции, т.е. точки 0 и 7. Обратим внимание, что точки -2 и 0 являются двойными. Расставим знаки по рассмотренному правилу и отберём промежутки, где .



Ответ: .

**Пример 2: **

Приведём неравенство к виду позволяющему применить метод интервалов:

****

 при любых значениях х, поэтому последнее неравенство равносильно неравенству:

****



Ответ: ; ; .

**Пример 3: **

Рассмотрим функцию (обязательно надо обращать внимание на то, что метод основан именно на знакопостоянстве функции в отдельных промежутках):



Нули функции: -6; --2; 1; 3.

Точки разрыва функции: 0; 7.



Ответ: .



**Пример 4: **

Приведём неравенство к виду, позволяющему применить метод интервалов:



Сократив дробь на  при условии, что , получим систему, равносильную последнему неравенству.



Неравенство системы решим методом интервалов:



**Необходимо обратить внимание учащихся на то, что число х=6 исключаем из уже найденного решения неравенства системы.**

Ответ:. 

Рациональные неравенства

**Пример 1.** Вычислите сумму всех целых решений неравенства:

.

,

,





Выпишем и найдём сумму всех целых решений неравенства: .

Ответ: 12.

**Пример 2.** Найти количество всех целых решений неравенства: , принадлежащих промежутку .

,

,





Целые решения неравенства, принадлежащие указанному промежутку: -3; 1.

Ответ: 2.

*б) Общий метод решения неравенств**, где* *любая алгебраическая или трансцендентная функция (метод интервалов).*

**Пример 1:** 

Найти число целых решений неравенства.

Рассмотрим функцию:



1. 

2.  при  посторонний корень, т.к. 

, 

|  |  |
| --- | --- |
| 3. |  |

, ;

 при .

Целые решения неравенства: -3;-2;-1;0;1.

Ответ: 5.

**Пример 2: .**

**ОДЗ:   .**

.

Рассмотрим функцию: 

Найдём нули функции: , (\*)



Имеем  посторонний корень уравнения (\*).

Нуль функции: 



, , ;

 при .

Ответ: , .

**Пример 3:** Решить неравенство .

Рассмотрим функцию:



Найдём область определения функции, решив систему:







Нули функции: , , , .



 при .

Ответ: .

**Пример 4: .**

ОДЗ:  







Учитывая ОДЗ, сократим дробь в левой части неравенства на выражение .



Рассмотрим функцию:



Нули функции: , , .

Точки разрыва учтены в ОДЗ неравенства.



Ответ: .

**Пример 4: .**

Рассмотрим функцию: .

 .



Нули функции: , , т.к. 



; .

 при , .

Ответ: ; .

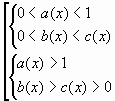
**Метод рационализации**

**Теоретическое обоснование метода**

Часто, при решении логарифмических неравенств, встречаются задачи с переменным основанием логарифма. Так, неравенство вида

http://festival.1september.ru/articles/611132/Image4196.gif

является стандартным школьным неравенством. Как правило, для его решения применяется переход к равносильной совокупности систем:

http://festival.1september.ru/articles/611132/Image4197.gif

Недостатком данного метода является необходимость решения семи неравенств, не считая двух систем и одной совокупности. Уже при данных квадратичных функциях решение совокупности может потребовать много времени. Можно предложить альтернативный, менее трудоемкий метод решения этого стандартного неравенства. Это метод рационализации неравенств, известный в математической литературе под названием декомпозиции.

**Метод декомпозиции**

Метод декомпозиции заключается в замене сложного выражения F(x) на более простое выражение G(x), при которой неравенство G(x)^0 равносильно неравенству F(x)^0 в области определения F(x).

*f, g, h* – выражения с переменной *х*, *a* – фиксированное число или функция ( *а>*0*, a≠*1).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | Выражение F | Выражение G |
| 1 |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
| 2 |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
| 3 |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
| 4 |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
| 5 |  |  |
|  |  |  |
| 6 |  |  |

Из данных выражений можно вывести некоторые следствия (с учетом области определения):

0 ⬄ 0

В указанных равносильных переходах символ ^ заменяет один из знаков неравенств: >, <, ≤, ≥.

**Комментарий.**

Стандартные ошибки, которые допускают учащиеся при использовании метода рационализации, заключаются в следующем:

а) проводят рационализацию без учета области определения данного неравенства;

б) применяют метод рационализации к неравенствам, не приведенным к стандартному виду F(x) ˅ 0;

в) формально применяют метод рационализации к выражениям вида

 , заменяя на выражение ;

г) подменяют формулировку «о совпадении знаков выражений для каждого

допустимого значения х» на неверную формулировку «о совпадении значений

выражений для каждого допустимого значения х».

**Для решения:**

**1)** Рассмотрим пример решения логарифмического неравенства двумя методами

**1. Метод интервалов**

О.Д.З.

-11/6

-5/3

////////////////////////////

x

a) b)

-5/3

-11/6

////////////////

x

//////////////////

x

-1

x

///////

x

//////////////////////

-1

-5/3

Нет решений

x

/////////////////////

-1

x

**Ответ: (  ;**

**2. Метод декомпозиции (рационализации)**

//////////////////////////////////////////////////////////////////

x

//////////////////////////////////////////////////////////////////

-1

x

**Ответ: ( ;**

**2) №17 из варианта 22** сборника Ященко И.В. 2015г.



1)    

2) ,

,

,

, ,

, 

,

, ;

1.    U  U .

Ответ. , , .

**3) №17 из варианта 23** сборника Ященко И.В. 2015г.



Решение.

1.     
2. ,

,

,

, 

;

1.  , 

Ответ. 

**4)№17 из варианта 18** сборника Ященко И.В. 2015г.



1)    

2) ,

,

,

, , , ,

, .

3)   U .

Ответ. , .

**5)** **№17 из варианта 13** сборника Ященко И.В. 2015г

,

1)   .

2) ,

,

, , 

.

3) .

Ответ. .

**6)**log12x2-41+35(3 – x) ≥ log2x2-5x+3(3- x).

**Решение.** Запишем неравенство в виде log12x2-41+35(3 – x) - log2x2-5x+3(3- x) ≥ 0 и заменим его равносильной системой, используя метод рационализации





Для решения первых трёх неравенств системы используем метод интервалов.

**Ответ:** 

**7)**  ≥ 0.

**Решение.** Заменим данное неравенство равносильной системой, используя метод рационализации









 < 2.

При решении неравенства (х – 1)(х – 2) < 0 системы учтены условия *x < 3, x > 0, x ≠ 1.* Условие *1 < x < 2* позволяет исключить множитель *x – 1 > 0* в первом неравенстве системы.

**Ответ:** .

**Дополнительно**

[0; 4]

///////////////////////////////////////////////////////////////

///////////////////////////////////////////////////////////////

х

-1/3

-1

///////////////////////////////////////////////////////////////

х

4

0

Ответ: [0; 4]

-2

Ответ:

Решение:



Ответ: (-1;1) U (3;5)